

## MAGNETOSTATIK

In der Vorlesung wurde mit der Behandlung von Magnetfeldern begonnen, die auf stationäre Ströme zurückgehen. Dazu betrachten wir einfache Beispiele.

**[H24]** *Amperèsches Gesetz***[8 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die beiden in der Vorlesung angegebenen Formeln des Amperèschen Gesetzes äquivalent sind, indem Sie den Ausdruck

$$\oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad \text{zu} \quad - \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

umformen. Zur Erinnerung: Es ist  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ .

**[H25]** *Helmholtz-Spulen***[2 + 4 + 4 + 2 = 12 Punkte]**

Zwei parallele kreisförmige Leiterschleifen werden beide vom Strom  $I$  in gleicher Richtung durchflossen. Die Schleifen liegen parallel zur  $(x, y)$ -Ebene, haben beide den Radius  $R$  und ihre Mittelpunkte liegen bei  $(x, y, z) = (0, 0, b)$  und  $(0, 0, -b)$ . Die Drähte werden idealerweise als verschwindend dünn angenommen.

- Geben Sie die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  der Anordnung an. Verwenden Sie dazu ein Koordinatensystem, das der Symmetrie des Problems angepasst ist. Überlegen Sie sich, wie die Idealisierung des Drahtquerschnitts durch Delta-Funktionen ausgedrückt werden kann.
- Berechnen Sie mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  auf der  $z$ -Achse.
- In welchem Abstand  $D = 2b$  müssen die Leiterschleifen angebracht werden, damit die magnetische Flussdichte zwischen ihnen möglichst homogen ist? Man bezeichnet die entsprechende Anordnung als Helmholtz-Spulen.  
*Hinweise:* Entwickeln Sie  $\vec{B}(z)$  in eine Taylorreihe um  $z = 0$ . Wenn Sie richtig gerechnet haben, verschwinden die Terme erster und dritter Ordnung in  $z$  für alle  $D$ , der Term zweiter Ordnung in  $z$  für eine spezielle Wahl von  $D$ . Wenn Sie Schwierigkeiten mit der Taylorentwicklung haben, überprüfen Sie Ihre Rechnung mit MATHEMATICA.
- Skizzieren Sie den Betrag der magnetischen Flussdichte,  $B(z)$ , auf der  $z$ -Achse für den Spulenabstand aus (c) sowie für einen deutlich größeren Spulenabstand.

**HINWEIS:** Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!  
Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!

**Bitte wenden!**

SPIELREGELN

- Computerübungen können allein oder zu zweit bearbeitet werden.
- Ihre Lösung muss vollständig mit MATHEMATICA erstellt, kommentiert und dokumentiert sein.
- Sie haben für die Bearbeitung drei Wochen Zeit (siehe Abgabedatum oben).
- Computerübungen werden in Ihren Präsenzübungen zum angegebenen Zeitpunkt Ihrem Tutor vorgeführt. Wenn Sie zu zweit gearbeitet haben, müssen Sie auch beide anwesend sein.
- Schicken Sie Ihrem Tutor vorab zum angegebenen Termin Ihr MATHEMATICA-Notebook per Email.
- Terminprobleme zur Vorführung in den Präsenzübungen werden nur bei triftigen Gründen anerkannt.
- Bitte bringen Sie zur Vorführung ein Notebook mit, auf dem MATHEMATICA installiert und Ihre Lösung lauffähig gespeichert ist. Sollte Ihnen dies nicht möglich sein, so bringen Sie Ihre Lösung auf einem USB-Stick mit.

**[C3] Randwertproblem** **[2 + 3 + 4 + 3 + 3 = 15 Punkte]**

Entwickeln Sie in Anlehnung an Kapitel 2.8 der Vorlesung das Potential  $\Phi(x, y)$  in einem ladungsfreien Rechteck allgemein für  $n$  Basisfunktionen unter folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &\equiv 0 && \text{für } x \in [0, a], \\ \Phi(0, y) &\equiv 0 && \text{für } y \in [0, b], \\ \Phi(a, y) &\equiv 0 && \text{für } y \in [0, b], \\ \Phi(x, b) &= V(x) && \text{für } x \in [0, a] \end{aligned} \quad \text{mit } V(x) = \begin{cases} V_0 a & \text{für } x < \frac{a}{2} \\ V_0 \left( \frac{a}{2} + 2 \left| x - \frac{3a}{4} \right| \right) & \text{für } x \in \left[ \frac{a}{2}, a \right] \end{cases} .$$

- Stellen Sie  $V(x)$  graphisch in einer Abbildung dar.
- Programmieren Sie die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten  $A_n$  für beliebiges  $n$ .
- Stellen Sie für  $a = b = 1$  das Potential  $\Phi(x, y)$  jeweils für  $n = 1, 3, 5, \dots, 11$  graphisch dreidimensional dar, also  $\Phi(x, y)$  über der  $xy$ -Ebene. Hierbei bezeichnet  $n$  jeweils den höchsten Term der Entwicklung. Sie dürfen  $V_0 = 1$  setzen.
- Überlagern Sie zudem in einer Abbildung die Näherungen für  $\Phi(x, b)$  für die gesamten Werte von  $n$ , die Sie in (c) verwendet haben.
- Erstellen Sie zum Vergleich nun Abbildungen für Näherungen von  $\Phi(x, y)$  und  $\Phi(x, b)$  für einen hohen Wert von  $n$ , zum Beispiel 137.

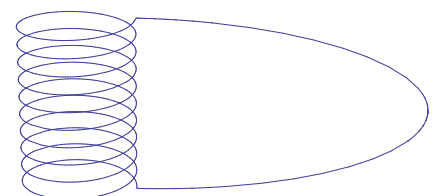
**[C4] Solenoid** **[1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 4 = 15 Punkte]**

Aus den Maxwell-Gleichungen kann man die folgende Wegintegral-Darstellung des magnetischen Feldes herleiten, das durch stationäre Ströme in dünnen, leitenden Drähten  $C$  erzeugt wird:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

wobei  $\mu$  die Permeabilität und  $I$  der Strom ist. Dies ist das Biot-Savart-Gesetz.

- Beginnen Sie mit einer einzelnen leitenden Schleife. Beschreiben Sie den Integrationsweg als Kreis mit Radius  $R = 1$  in der  $xy$ -Ebene durch eine parametrische Kurve. Mit `ParametricPlot3D` können Sie dies plotten.
- Verwenden Sie das Biot-Savart-Gesetz, um die magnetische Flussdichte außerhalb dieses eindimensionalen Leiters zu berechnen. Plotten Sie die Komponente  $B_z$  auf der Geraden  $(x, 0, 0)$ . Mit Hilfe von `VectorPlot` erhalten Sie einen Eindruck für das Feld z.B. in der  $xz$ -Ebene.
- Berechnen Sie die Feldlinie durch einen Punkt ihrer Wahl: Stellen Sie einen Satz von Differentialgleichungen für die Feldlinie auf,  $\vec{r}(\lambda) = \vec{B}(\vec{r}(\lambda))$ , und lösen Sie numerisch mit `NDSolve`. Es sind  $\vec{r}(\lambda)$  die Orte auf der Feldlinie parametrisiert durch  $\lambda$ . Sie dürfen  $\mu = 1$  und  $I = 1$  setzen.
- (d)-(f) Wiederholen Sie die Schritte aus (a) bis (c) für einen Solenoiden aus zehn Schleifen (eine Helix), wobei Sie in der Rechnung einen geschlossenen Weg verwenden und dazu die Spule durch einen geeigneten Leiter außerhalb des Solenoiden schließen, so wie hier dargestellt.



**HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!**